فصلنامه پژوهشنامه اقتصادی
سال چهاردهم، شماره ۵۳، بهار ۱۳۹۳، صفحات ۱۶۸-۱۴۳

مدل‌سازی شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران با استفاده از معادله دیفرانسیل تصادفی هستون

عبدالساده نیسی[*] و مسلم پیمانی[**]

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۲/۲۰ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۳/۶/۳۱

چکیده

در پژوهش پیش رو شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران با استفاده از معادله دیفرانسیل تصادفی هستون مدل‌سازی شده و عملکرد این مدل مورد سنجش قرار گرفته است. بدین منظور پس از معرفی اجمالی معادلات دیفرانسیل تصادفی، به بررسی دقیق‌تر معادله هستون پرداخته و سپس، پارامترهای این مدل براساس داده‌های واقعی شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران تخمین زده شده است. در این مسیر از قضیه فوکر – پلانک برای استخراج تابع توزیع مدل هستون و روش گاوس – هرمیت برای تخمین یک انتگرال نامعین بهره جسته‌ایم. سرانجام برای سنجش توانایی این مدل در ورطه عمل، ارزش در معرض خطر شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران مبتنی‌بر شبیه‌سازی مونت‌کارلو براساس مدل هستون محاسبه شده و با فرآیند تصادفی حرکت براونی هندسی به‌عنوان مدل تصادفی استاندارد مورد استفاده عموم، براساس رویکرد پس‌آزمون مورد مقایسه قرار گرفته که نتایج این مقایسه حاکی از عملکرد نسبی بهتر مدل هستون است.

طبقه‌بندی JEL: *G00, G11, G130.*

کلیدواژه‌ها: *معادلات دیفرانسیل تصادفی، مدل هستون، معادله فوکر ـ پلانک، روش گاوس ـ هرمیت، ارزش در معرض خطر.*

---

*دانشیار گروه آمار، ریاضی و کامپیوتر دانشگاه علامه طباطبائی،
پست الکترونیکی: a_neisy@iust.ac.ir.
**دانشجوی دوره دکترای مدیریت مالی دانشگاه علامه طباطبائی.

۱- مقدمه

علم مالی یکی از شاخه‌های علوم انسانی است که ریاضیات و مدل‌های کمی در آن تأثیر بسزایی داشته است. از آنجا که بسیاری از کمیت‌های مالی، متغیرهایی تصادفی‌اند و نمی‌توان تغییرات آنها را به‌طور کامل به‌وسیله دیگر متغیرها توضیح داد، ریاضیات جبری که با متغیرهای تعینی[۱] و غیرتصادفی سروکار دارد، در علوم مالی کاربرد کمتری یافته است. بدین دلیل معادلات دیفرانسیل تصادفی[۲] به‌عنوان یکی از شاخه‌های ریاضیات، در زمینه مالی مورد توجه زیادی قرار گرفته است؛ برای نمونه، حرکت براونی هندسی، یکی از فرآیندهای تصادفی پرکاربرد در علوم مالی است که در یک معادله دیفراسیل تصادفی صدق کرده و در رابطه بلک و شولز نیز مبنا قرار داده شده است. با این حال، این فرآیند مورد انتقادهایی قرار گرفته که برای رفع بخشی از این انتقادها، مدل‌های دیگری از جمله مدل هستون[۳] ارایه شده است. براساس این، در نوشتار حاضر تمرکز بر مدل هستون قرار دارد. همچنین عملکرد این مدل در تخمین ارزش در معرض خطر مبتنی‌بر شبیه‌سازی مونت‌کارلو نیز به‌عنوان یکی از کاربردهای معادلات دیفرانسیل تصادفی بررسی شده است.

بدین منظور در بخش اول این مقاله، با استفاده از رویکرد کاربردیِ مدل‌سازی رفتار قیمت یک ورقه بهادار، به توضیح مختصر معادلات دیفرانسیل تصادفی و مهم‌ترین مفاهیم مربوط به آن می‌پردازیم. سپس، با اشاره به مشکلات مدل‌های تصادفی مورد استفاده کنونی مانند حرکت براونی هندسی، مدل هستون به‌عنوان مدلی با نوسانات تصادفی برای رفع برخی از این مشکلات معرفی و تشریح می‌شود. پس از آن، نحوه تخمین پارامترهای مدل هستون مورد بررسی بیشتری قرار می‌گیرد و در نهایت، پس از ارایه شواهدی آماری در خصوص لزوم به‌کارگیری مدل با نوسانات تصادفی و تخمین پارامترهای این مدل براساس داده‌های واقعی، عملکرد آن را در محاسبه ارزش در معرض خطر بررسی و با مدل حرکت براونی هندسی مقایسه می‌کنیم.

1- Deterministic
2- Stochastic Differential Equations (SDE)
3-- Heston

۲- مبانی نظری تحقیق

در این بخش، ابتدا مدل‌سازی رفتار قیمت یک دارایی بدون ریسک را به‌عنوان یک دارایی ساده شروع می‌کنیم و سپس، با تکمیل آن و اضافه کردن عنصر ریسک به فضای سرمایه‌گذاری، به یک معادله دیفرانسیل تصادفی دست می‌یابیم.

فرض کنید تغییرات قیمت یک ورقه بهادار نسبت به زمان تابع معینی از مقدار قیمت باشد. در این صورت اگر $S(t)$ قیمت یک ورقه بهادار مانند اوراق قرضه در زمان t باشد، تغییرات این متغیر مالی متناسب با مقدار آن و طول دوره زمانی مورد بررسی خواهد بود، یعنی:

$$dS(t) \sim S dt \qquad (۱)$$

در این صورت نسبت یادشده را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{dS}{\mathrm{dt}} = a(t)S(t) \qquad ,S(\circ) = S_\circ \qquad (۲)$$

که در آن، متغیر S، نشان‌دهنده قیمت ورقه بهادار، t زمان و a یک ضریب غیرتصادفی است (که در عمل نشان‌دهنده نرخ بهره است). با ثابت فرض کردن مقدار a این معادله یک معادله دیفرانسیل معمولی بوده که دارای پاسخی به شکل زیر است[۱]:

$$S(t) = S_0 e^{at} \qquad (۳)$$

واضح است که بیشتر متغیرهای مالی، متغیرهای تعینی و غیرتصادفی نیستند و مدل‌هایی مانند مدل یادشده را نمی‌توان مدلی مناسب برای توصیف رفتار این متغیرها دانست. یک راه ساده برای وارد کردن جزء تصادفی به این مدل، اضافه کردن یک جمله تصادفی یا نوفه[۲] به پارامتر a است[۳].

$$\frac{dS}{\mathrm{dt}} = a(t)S(t) \qquad (٤)$$

۱- این معادله یک معادله دیفرانسیل معمولی درجه اول با مرتبه اول تفکیک‌پذیر است و جزء ساده‌ترین انواع معادلات دیفرانسیل معمولی محسوب می‌شود.

2- Noise

3- Oksendal, 2003.

$$a(t) = r(t) + \text{"}noise\text{"} \quad (۵)$$

به عبارتی، با این روش، مقدار a به دو قسمت غیرتصادفی (r) و تصادفی تقسیم می‌شود. یادآوری می‌شود، در خصوص رفتار دقیق قسمت تصادفی اطلاعاتی در دسترس نبوده و تنها در خصوص توزیع آن می‌توان قضاوت کرد. اضافه کردن این جزء تصادفی به مدل ساده اولیه موجب ایجاد یک معادله دیفرانسیل تصادفی می‌شود که به روش‌های معمول قابل حل نیست و نیازمند تکنیک‌های حسابان تصادفی است. حسابان تصادفی را می‌توان ترکیبی از دانش حسابان[۱] (حساب دیفرانسیل و انتگرال) و علوم احتمال (شامل نظریه احتمال، نظریه اندازه[۲]، فرآیندهای تصادفی[۳] و...) دانست[۴].

یکی از ساده‌ترین مدل‌های تصادفی، مدل تصادفی با جمله رانش و نوسانات تصادفی ثابت است. این مدل تحت عنوان حرکت براونی هندسی نیز شناخته شده و فرآیندی است که بلک، شولز و مرتون نیز در مدل‌سازی قیمت اوراق مشتقه به‌عنوان معادله دیفرانسیل تصادفی حاکم بر رفتار قیمت دارایی پایه در نظر گرفتند[۵].

$$dS = \mu S dt + \sigma S dB \quad (٦)$$

در این معادله، B، نشان‌دهنده حرکت براونی است. این معادله را می‌توان به حالت کلی زیر نیز تعمیم داد:

$$dS = \mu(S,t) S dt + \sigma(S,t) S dB \quad (۷)$$

که شکل انتگرالی آن به صورت زیر خواهد بود:

$$S(T) = S(0) + \int_0^T \mu(S,t) S dt + \int_0^T \sigma(S,t) S dB \quad (۸)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود در مدل یادشده در انتگرال اول جمله تصادفی وجود ندارد و می‌توان آن را با تکنیک‌های حسابان جبری حل کرد (انتگرال ریمان)، اما انتگرال

1- Calculus
2- Measure Theory
3- Stochastic Processes
4- Focardi & Fabozzi, 2004.
5- Wilmott, 2006.

دوم برحسب دیفرانسیل یک متغیر تصادفی مطرح شده است که تحت عنوان انتگرال ایتو (انتگرال تصادفی) شناخته می‌شود[۱].

۲-۱- انتقادهای وارد شده به حرکت براونی هندسی

با توجه به اهمیت حرکت براونی هندسی در ابتدا به بررسی انتقادهای وارد شده به این مدل به‌عنوان علت اصلی نیاز به مدل‌های پیچیده‌تر مانند مدل هستون می‌پردازیم. در ابتدا مدل مربوط به حرکت براونی هندسی را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$dS_t / S_t = \mu dt + \sigma dB_t \qquad (۹)$$

که در آن S_t قیمت دارایی پایه (سهم) در زمان t و B_t نشان‌دهنده حرکت براونی است. همان‌طور که مشاهده می‌شود ضرایب μ و σ ثابت است که این موضوع نتایجی را به همراه دارد که با توجه به عدم تطابق این نتایج با نتایج حاصل از بررسی داده‌های واقعی موجب انتقاد محققان مالی از این مدل شده است. این انتقادها را می‌توان به سه دسته کلی زیر تقسیم کرد:

عدم توزیع نرمال بازده: شواهد تجربی بررسی آماری بازدهی سهام حاکی از عدم پیروی این متغیر تصادفی از توزیع نرمال است. به عبارت دقیق‌تر، در بازده سهام پدیده‌هایی مانند چولگی مثبت، کشیدگی ناهماهنگ با توزیع نرمال و دنباله‌های پهن[۲] مشاهده شده است. این مسأله در حالی بوده که استفاده از مدل حرکت براونی هندسی دال بر فرض توزیع نرمال برای متغیر تحت بررسی است[۳].

وجود نوسانات تصادفی: وجود پدیده نوسانات خوشه‌ای[۴] حاکی از وابستگی نوسانات به مقادیر قبلی خود و غیرثابت بودن آن است. با وجود این، پارامتر نوسانات در مدل حرکت براونی هندسی ثابت در نظر گرفته می‌شود و ازاین‌رو، این مدل قادر به بیان ویژگی

1- Mikosch, 2004.
2- Fat Tail
3- Schoutnes, 2003.
4- Volatility Clustering

نوسانات تصادفی نیست. این مشکل را با استفاده از مدل‌های با نوسانات تصادفی مانند مدل هال و وایت[1] (۱۹۸۷)، مدل هستون (۱۹۹۳)، مدل گارچ، مدل اورنشتین – اولنبک، مدل شونباچر[2] (۱۹۹۹) و... می‌توان مرتفع کرد. برای رفع این نقیصه می‌توان فرض کرد که نوسانات نیز از یک معادله دیفرانسیل تصادفی مجزا پیروی می‌کنند:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dB_1 \quad (۱۰)$$

$$d\sigma^2 = p\left(S,\sigma^2,t\right)dt + q\left(S,\sigma^2,t\right)dB_2 \quad (۱۱)$$

p و q دو تابع و B_1 و B_2 دو حرکت براونی با ضریب همبستگی ρ هستند. از بین مشهورترین مدل‌های با نوسانات تصادفی می‌توان به مدل هال و وایت و مدل هستون اشاره کرد. در پژوهشی که در سال ۱۹۸۷ توسط هال و وایت انجام شد نوسانات از یک معادله دیفرانسیل تصادفی به شکل کلی زیر تبعیت می‌کرد:

$$d\sigma^2 = \alpha\left(\sigma^2\right)dt + \omega\left(\sigma^2\right)dB \quad (۱۲)$$

که α و ω دو تابع تعینی و B حرکت براونی جدیدی است. بدین ترتیب یکی از حالات خاص این مدل به صورت زیر خواهد بود:

$$d\sigma^2 = \alpha\sigma^2 dt + \omega\sigma^2 dB^{(1)} \quad (۱۳)$$

که حد پیوسته یک فرآیند گارچ مرتبه (۱ و۱) محسوب می‌شود. همچنین هستون در سال ۱۹۹۳ مدل خود را برای توضیح نوسانات به صورت زیر ارایه داد:

$$d\sigma^2 = -\gamma\left(\sigma^2 - \theta\right)dt + k\sigma dB^{(2)} \quad (۱۴)$$

که در این رابطه، γ نشان‌دهنده سرعت بازگشت به میانگین، θ مقدار واریانس در بلندمدت و k بیان‌کننده نوسانات واریانس است[3]. از ویژگی‌های بارز مدل هستون وجود

1- Hull & White
2- Schonbucher
3- Psychoyios & Skiadopoulos, 2003.

یک راه‌حل تحلیلی برای قیمت‌گذاری اوراق اختیار معامله‌ای است که فرض می‌شود دارایی پایه آن از فرآیند هستون پیروی می‌کند.

وجود گسستگی در فرآیند قیمت: بررسی تاریخی قیمت سهام حاکی از این موضوع است که فرآیند قیمت را نمی‌توان فرآیندی پیوسته دانست و در برخی موارد، جهش‌هایی[۱] در این فرآیند ملاحظه می‌شود. این مسأله با اضافه کردن جمله جهش برگرفته شده از توزیع پواسون به معادله دیفرانسیل تصادفی تحت بررسی قابل حل است[۲]. می‌توان انتظار داشت که به دلیل وجود حد مجاز دامنه نوسان قیمت سهام در بازار سرمایه ایران و حذف این حد در موارد خاص مانند زمان افشای اطلاعات بااهمیت توسط شرکت‌ها و جهش قیمت سهام در این مواقع، این گسستگی در بازار سهام ایران چشمگیرتر باشد.

۲-۲- کاربردهای معادلات دیفرانسیل تصادفی در علوم مالی

به جرأت می‌توان ادعا کرد که بیشترین شهرت معادلات دیفرانسیل تصادفی در علوم مالی مدیون معرفی مدل بلک و شولز برای قیمت‌گذاری اختیار معاملات است. ازاین‌رو، کاربرد حسابان تصادفی در قیمت‌گذاری اوراق مشتقه از مهم‌ترین کاربردهای این شاخه از علوم در مالی محسوب می‌شود. از دیگر کاربردهای معادلات دیفرانسل تصادفی در مالی می‌توان به مدیریت ریسک، به‌خصوص در مباحثی مانند تخمین ارزش در معرض خطر به روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو اشاره کرد (با توجه به کاربرد این موضوع در این نوشتار، در ادامه توضیحات بیشتری در این خصوص ارایه می‌شود). پیش‌بینی قیمت سهام به‌وسیله معادلات دیفرانسیل تصادفی از دیگر کاربردهای این شاخه از ریاضیات در مالی قلمداد می‌شود. از دیگر موارد قابل بیان در این خصوص، بهینه‌سازی پرتفوی سهام به روش‌های تصادفی است. کارآیی تمام مدل‌های فوق (قیمت‌گذاری اوراق مشتقه، اندازه‌گیری و مدیریت ریسک، پیش‌بینی قیمت سهم، بهینه‌سازی تصادفی و...) منوط به استخراج بهترین معادله دیفرانسیل تصادفی ممکن است که بتواند رفتار قیمت سهام و دیگر اوراق بهادار

1- Jumps
2- Platen, 2007.

مالی را به‌درستی هرچه تمام‌تر توضیح دهد؛ برای نمونه، مدل بلک و شولز بر این فرض استوار است که قیمت سهام از حرکت براونی هندسی پیروی می‌کند[1]. این فرض منتج به استخراج مدل بلک و شولز می‌شود که امروز مورد استفاده زیادی نیز هست. البته با وجود کاربرد روزمره این مدل در بازارهای مالی این انتقاد بر مدل یادشده مطرح می‌شود که فرض رفتار قیمت سهام براساس حرکت براونی هندسی چندان واقع‌گرایانه نیست و معادلات دیفرانسیل تصادفی دیگری وجود دارند که قدرت توضیح‌دهندگی آنها نسبت به حرکت براونی هندسی بیشتر است (مانند معادلات با نوسانات تصادفی[2] یا جمله جهش[3]) و ازاین‌رو، با استخراج معادله دیفرانسیل تصادفی بهتر برای تشریح رفتار قیمت دارایی پایه و به‌دست آوردن رابطه جدیدی برای قیمت اوراق مشتقه، براساس آن می‌توان به مدل‌های دقیق‌تری در این خصوص دست یافت. این موضوع محدود به قیمت‌گذاری اوراق مشتقه نیست و شامل دیگر موارد عنوان شده در بالا (اندازه‌گیری و مدیریت ریسک، پیش‌بینی قیمت سهم، بهینه‌سازی تصادفی و ...) نیز می‌شود.

۲-۳- ارزش در معرض خطر و معادلات دیفرانسیل تصادفی

یکی از معیارهایی که به‌طور متعارف برای اندازه‌گیری ریسک بازار در سرمایه‌گذاری به کار گرفته می‌شود، انحراف معیار قیمت آن دارایی است، اما اگر فردی علاقه‌مند به دانستن بیشترین ریسک نامطلوب که در معرض آن قرار گرفته است، باشد، آنگاه معیار ارزش در معرض خطر[4] ابزار مناسب‌تری خواهد بود. به‌طور ساده می‌توان گفت، ارزش در معرض خطر پرتفوی، حداکثر زیانی است که با احتمال مشخص آن پرتفوی در طول دوره نگهداری معین (دوره‌ای که طی آن ترکیب پرتفوی بدون تغییر باقی می‌ماند) متحمل می‌شود[5]. ارزش در معرض خطر همواره با سطح اطمینان خاص α (عموماً در دامنه ۹۵ تا

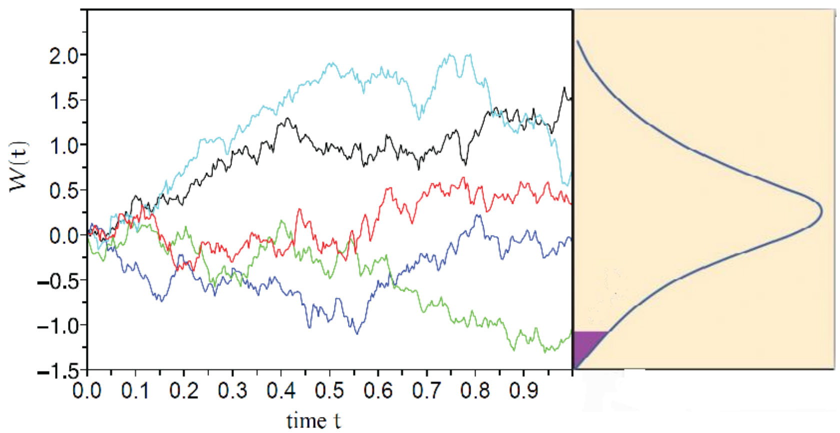
1- Peymany & Neisy, 2010.
2- Stochastic Volatility
3- Jump Term
4- Value at Risk (VaR)
5- Lopez, 1998.

۹۹/۹ درصد) بیان می‌شود. به بیان دیگر، در صورتی که بازده یک دارایی دارای توزیع P باشد، با در نظر گرفتن $\int_{-\infty}^{r^*} Pdx = \alpha$ ، r^* بیان‌کننده مقدار ارزش در معرض خطر خواهد بود[1].

برای محاسبه ارزش در معرض خطر، روش‌های گوناگونی وجود دارد؛ دسته اول این مدل‌ها که تحت عنوان مدل‌های پارامتریک نیز شناخته می‌شوند، مبتنی‌بر فروضی در خصوص توزیع داده تحت بررسی هستند؛ برای مثال، بیشتر این مدل‌های ارزش در معرض خطر فرض می‌کنند توزیع به صورت نرمال است. دسته دوم این مدل‌ها با استفاده از داده‌های تاریخی واقعی به محاسبه ارزش در معرض خطر می‌پردازند. این روش یک روش ناپارامتریک است و نیاز به هیچ فرضیه مرتبط با توزیع ندارد. شبیه‌سازی تاریخی به‌طور اساسی تنها از توزیع تجربی بازده‌های پرتفوی استفاده می‌کند. آخرین دسته از روش‌های تخمین ارزش در معرض خطر، روش‌های مبتنی‌بر روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو است که با در دست داشتن مدلی که رفتار متغیر مالی تحت بررسی را تشریح می‌کند، به شبیه‌سازی تعداد زیادی مسیر نمونه از آن مبادرت می‌کند و براساس نتایج این شبیه‌سازی به تخمین ارزش در معرض خطر می‌پردازد[2]. در اینجاست که معادلات دیفرانسیل تصادفی یا سایر مدل‌های تصادفی در تخمین ارزش در معرض خطر به کار گرفته خواهند شد. به عبارتی، در این روش، یک مدل تصادفی، مبنای کار قرار می‌گیرد و با ایجاد تعداد زیادی مسیرهای شبیه‌سازی شده برای دوره‌ای خاص، مقدار نهایی متغیر تصادفی تحت بررسی محاسبه می‌شود و از طریق مجموعه این مقادیر، مقدار ارزش در معرض خطر محاسبه می‌شود. این فرآیند در شکل شماره ۱، به تصویر کشیده شده است.

1- Grotke, 2010.
2- Olli, 2009.

شکل ۱- نحوه محاسبه ارزش در معرض خطر براساس شبیه‌سازی مونت‌کارلو



همان‌طور که مشاهده می‌شود، پس از انجام شبیه‌سازی مسیرهای نمونه براساس یک مدل تصادفی مانند حرکت براونی هندسی یا مدل هستون (که در این شکل برای وضوح تصویر تنها ۵ مسیر به تصویر کشیده شده است)، مقادیر نهایی هر مسیر ذخیره شده و براساس مقادیر مرتب شده آن، α درصد پایینی انتخاب و مقدار مرزی به‌عنوان ارزش در معرض خطر در نظر گرفته می‌شود. به بیان دیگر، توزیع فراوانی برای مقادیر نهایی تمام مسیرها تهیه شده و براساس آن مقدار بازدهی که تنها α درصد مقادیر بازدهی از آن کمتر است، به‌عنوان ارزش در معرض خطر اعلام می‌شود. در این پژوهش با استفاده از مدل هستون، محاسبه ارزش در معرض خطر انجام و با استفاده از روش‌های پس‌آزمون، قدرت آن با مدل معمول مورد استفاده (حرکت براونی هندسی) مقایسه شده است.

۳- روش تحلیل داده‌ها

در این بخش به‌طور عملی به بررسی کاربردپذیری مدل هستون و مقایسه آن با معادله حرکت براونی هندسی (به‌عنوان یک معادله دیفرانسیل تصادفی ساده) می‌پردازیم. همان‌گونه که قبلاً نیز بدان اشاره شد، در این نوشتار، ارزش در معرض خطر به‌عنوان حیطه کاربردی معادلات دیفرانسیل تصادفی انتخاب شده است. به عبارت دیگر، با استفاده از این

دو معادله و با بهره جستن از فنون شبیه‌سازی مونت‌کارلو، به محاسبه ارزش در معرض خطر یک کمیت مالی می‌پردازیم. در این خصوص، متغیر مالی مورد انتخاب، شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران برای دوره زمانی ۱۳۸۷/۰۵/۰۳ (نخستین تاریخ انتشار شاخص بازده نقدی و قیمت) تا انتهای سال ۱۳۹۱ است[1] که براساس آن ارزش در معرض خطر تخمین زده می‌شود و با داده‌های واقعی مورد مقایسه قرار می‌گیرد. به‌منظور روشن‌تر شدن روش مورد استفاده، هر یک از گام‌های ضروری در ادامه تشریح شده است:

۱- **تخمین پارمترهای هر یک از معادلات دیفرانسیل تحت بررسی:** برای این منظور از ۳۰۰۰ داده استفاده شده است و با حرکت پنجره تخمین به جلو به اندازه یک داده، عملیات تخمین ۲۰۰ مرتبه تکرار شده و در نهایت، ۲۰۰ بردار از برآورد پارامترهای هر معادله تحت بررسی به‌دست می‌آید.

۲- **شبیه‌سازی مسیرهای نمونه:** با هر یک از ۲۰۰ بردار پارامتر به‌دست آمده در گام قبلی و براساس مدل هستون، هزار مسیر نمونه هر یک به طول ۱۰ روز برای بازده شبیه‌سازی می‌شود. این عمل برای مدل حرکت براونی هندسی نیز انجام می‌شود.

۳- **محاسبه ارزش در معرض خطر:** براساس مقدار شاخص شبیه‌سازی شده آخرین روز مسیرهای ۱۰ روزه قبلی، ۲۰۰ توزیع فراوانی برای هر مدل به‌دست می‌آید که براساس هر یک می‌توان ارزش در معرض خطر با سطح خطای ۱ درصد را محاسبه کرد.

۴- **مقایسه دو مدل:** از مقایسه ۲۰۰ ارزش در معرض خطر به‌دست آمده برای هر مدل با داده‌های واقعی و همچنین با یکدیگر می‌توان به مقایسه عملکرد هر یک از دو مدل پرداخت.

۱- خاطرنشان می‌شود، با توجه به تغییر نحوه محاسبه این شاخص در ۱۶ آذر ۱۳۸۷، قبل از این تاریخ از مقادیر شاخص بازده نقدی و قیمت استفاده شده و پس از آن مقادیر شاخص کل مورد استفاده قرار گرفته است. همچنین در داده‌های مزبور اثر تغییر مقدار پایه شاخص نیز خنثی شده است.

- تخمین پارامترهای مدل:

اگرچه تخمین پارامترهای مدل حرکت براونی هندسی به‌سادگی امکان‌پذیر است، اما برآورد تمام پارامترهای مدل هستون چندان ساده نیست. به همین جهت پس از توضیح مختصر نحوه به‌دست آوردن برآورد پارامترهای مدل براونی هندسی، در خصوص روش‌های مختلف تخمین پارامترهای مدل هستون صحبت می‌کنیم و در نهایت، براساس یک روش این عمل را انجام می‌دهیم.

- تخمین پارامترهای مدل حرکت براونی هندسی:

همان‌طور که در بخش معادلات دیفرانسیل تصادفی با جمله رانش و نوسانات ثابت شرح داده شد، این دو کمیت که پارامترهای مدل حرکت براونی هندسی محسوب می‌شوند به‌راحتی از طریق محاسبه میانگین و انحراف معیار بازده متغیر مالی تحت بررسی قابل محاسبه‌اند. ازاین‌رو، به‌منظور برآورد پارامترهای μ و σ کافی است بازده روزانه شاخص کل را محاسبه و میانگین و انحراف آن را به‌عنوان برآورد پارامترها محاسبه کرد.

- تخمین پارامترهای مدل هستون:

به‌طور کلی روش‌های تخمین پارامترهای مدل هستون از دو شیوه کلی قابل انجام است. این تقسیم‌بندی به نوعی براساس داده‌های مورد استفاده در تخمین انجام پذیرفته است. در دسته اول قیمت واقعی اوراق اختیار معامله در بازار نیز مورد استفاده قرار می‌گیرند. بدین ترتیب براساس داده‌های موجود واقعی در خصوص قیمت دارایی پایه، پارامترهای معادله مورد بررسی (مانند مدل هستون) به‌گونه‌ای برآورد می‌شود که قیمت نظری حاصل از آن مدل برای اختیار معامله منعقد شده برای آن دارایی هرچه بیشتر به قیمت‌های واقعی اختیار معامله در بازار نزدیک شود. به عبارت دیگر، با تشکیل یک تابع زیان بین قیمت واقعی اختیار معامله و قیمت تخمینی حاصل از فرآیند تحت بررسی برای آن اختیار، این تابع زیان را با تغییر مقادیر پارامترها کمینه می‌کند و بدین ترتیب برآوردی از پارامترهای مدل به‌دست می‌آید. اگرچه این روش پیچیدگی چندانی ندارد، اما تنها برای دارایی‌هایی قابل استفاده است که اختیار معامله‌ای برای آن وجود داشته و به‌طور فعالانه نیز در بازار مورد معامله قرار

گیرد. همچنین این روش بر فرض منصفانه بودن قیمت اختیار معامله براساس دارایی پایه بنیان نهاده شده است. ازاین‌رو، با توجه به عدم کاربردپذیری این روش در خصوص بازار سرمایه ایران که در حال حاضر اختیار معاملات در آن مورد معامله قرار نمی‌گیرد، از توضیح بیشتر آن خودداری می‌کنیم. دسته دوم روش‌های تخمین، روش‌هایی است که تنها براساس سری زمانی قیمت دارایی پایه انجام شده و نسبتاً نیز پیچیده هستند. علت اصلی این پیچیدگی نبود سری زمانی نوسانات به‌عنوان یک سری زمانی مجزاست. این دسته از روش‌ها نیز به‌نوبه‌خود به چند زیردسته مانند روش‌های گشتاورها، گشتاورهای تعمیم‌یافته، روش مبتنی‌بر توزیع، غربالگری کالمن و حداکثر راست‌نمایی و شبیه‌سازی مونت‌کارلو براساس زنجیره مارکوف قابل تقسیم است[۱]. اگرچه هر یک از این روش‌ها نسبت به دیگری از مزایا و معایب خاصی برخوردار است، با این حال، در این نوشتار روش مبتنی‌بر توزیع بازده انتخاب شد، زیرا در این روش اطلاعات مفید دیگری نیز در خصوص توزیع تئوریک متغیر تصادفی تحت بررسی مبتنی‌بر فرض رفتار براساس مدل هستون نیز به‌دست می‌آید که جدای از پارامترهای تخمین زده شده خود دارای ارزش اطلاعاتی بالایی است. همچنین در اجرای آن از روش گاوس – هرمیت[۲] برای تخمین یک انتگرال نامعین با کران‌های نامحدود استفاده می‌شود که برای نخستین‌بار در این مقاله از آن بهره برده‌ایم.

٤- تخمین پارامترهای مدل هستون به روش مبتنی‌بر توزیع:

فرض کنید دارایی تحت بررسی براساس رابطه زیر رفتار می‌کند:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma_t S_t dB_t^{(1)} \qquad (۱۵)$$

که در آن t نشان‌دهنده اندیس زمان، μ جمله رانش، $B_t^{(1)}$ حرکت براونی استاندارد و σ_t نوسانات تصادفی طی زمان است. با یک تغییر متغیر از S_t به بازده لگاریتمی $r_t = \log(S_t / S_{t-1})$ و حذف جمله رانش از طریق جایگزین کردن $x_t = r_t - \mu t$ و استفاده از لم ایتو به رابطه زیر دست می‌یابیم:

1- Shephard & Andersen, 2008.
2- Gauss - Hermite

$$dx_t = -\frac{\nu_t}{۲}dt + \sqrt{\nu_t}\,dB_t^{(۱)} \qquad (۱۶)$$

که $\sigma_t = \sqrt{\nu_t}$ است. در مدل هستون فرض می‌شود که ν_t از رابطه بازگشت به میانگین زیر تبعیت می‌کند:

$$d\nu_t = -\gamma\left(\nu_t - \theta\right) + k\sqrt{\nu_t}\,dB_t^{(۲)} \qquad (۱۷)$$

در حالت کلی $dB_t^{(۱)}$ و $dB_t^{(۲)}$ می‌توانند دارای ضریب همبستگی ρ باشند که در این پژوهش این ضریب برابر صفر فرض می‌شود (نتایج تحقیقات قبلی نشان از عدم تأثیرگذاری این فرض بر پارامترهای تخمینی است[1]. حال می‌توان با استفاده از قضیه فوکر–پلانک[2] به توزیع احتمال مشترک بازدهی لگاریتمی x و نوسانات ν، $P_t(x,\nu|\nu_i)$ با شرایط اولیه $x=۰$ و داشتن واریانس ν_i در زمان $t=۰$ با حل معادله دیفرانسیل با ضرایب جزیی زیر دست یافت:

$$\frac{\partial}{\partial t}P = \gamma\frac{\partial}{\partial \upsilon}\left[\left(\upsilon-\theta\right)P\right] + \frac{۱}{۲}\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu P\right) + \rho k\frac{\partial^۲}{\partial x\partial \upsilon}\left(\upsilon P\right) + \frac{۱}{۲}\frac{\partial^۲}{\partial x^۲}\left(\nu P\right) + \frac{k^۲}{۲}\frac{\partial^۲}{\partial \upsilon^۲}(\upsilon P) \qquad (۱۸)$$

اگرچه این معادله حل تحلیلی نهایی ندارد، اما دراگولسکو و یاکوونکو با فرض ضریب همبستگی برابر صفر به پاسخ زیر برای تابع توزیع حاشیه‌ای $P_t\left(x\right)$ دست یافتند:

$$P_t\left(x\right) = \frac{e^{-x/۲}}{x_۰}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\tilde{p}}{۲\pi}e^{i\tilde{p}\tilde{x}+F_{\tilde{t}}(\tilde{p})} \qquad (۱۹)$$

که در آن داریم:

$$F_{\tilde{t}}\left(\tilde{p}\right) = \frac{\alpha\tilde{t}}{۲} - \alpha\ln\left[\cosh\frac{\tilde{\Omega}\tilde{t}}{۲} + \frac{\tilde{\Omega}^۲+۱}{۲\tilde{\Omega}}\sinh\frac{\tilde{\Omega}\tilde{t}}{۲}\right] \qquad (۲۰)$$

و $\tilde{\Omega} = \sqrt{۱+\tilde{p}^۲}$، $\tilde{t} = \gamma t$، $\tilde{x} = x/x_۰$ و $x_۰ = k/\gamma$ و $\alpha = ۲\gamma\theta/k^۲$ است.

حال برای تخمین ۳ پارامتر باقی‌مانده (k,γ,θ) باید تابع توزیع نظری حاصل از رابطه یادشده را با تابع توزیع تجربی بازده لگاریتمی حاصل از شاخص کل مقایسه و مجذور

1- Dragulescu & Yakovenko, 2002.

2- Fokker–Planck

تفاوت این دو را کمینه کرد. در این خصوص توجه به چند نکته ضروری است؛ نخست اینکه با توجه به غیرخطی بودن رابطه مربوط به احتمالات نظری، برای این کمینه‌سازی نیز باید از روش‌های غیرخطی استفاده کرد (در این پژوهش از الگوریتم لونبرگ – مارکویت استفاده شده است). همچنین در رابطه مربوط به $P_t(x)$ با یک انتگرال با کران بالا و پایین نامحدود مواجه‌ایم که در حالت کلی پاسخ تحلیلی ندارد و ازاین‌رو، ضروری است به صورت عددی به تخمین آن بپردازیم. با توجه به بی‌نهایت بودن کران بالا و پایین این انتگرال، از روش گاوس – هرمیت برای تخمین این انتگرال بهره جستیم[1]. رویه کلی در این روش، تخمین یک انتگرال با یک تابع گسسته و براساس نقاط گسسته‌سازی و تابع وزن خاص است. به عبارت روشن‌تر، برای تخمین انتگرال نمونه $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{P}(x)\mathcal{G}(x)dx$ ، از تخمین $\sum_{k=1}^{n}\mathcal{W}_k\mathcal{G}(x_k)$ بهره می‌جوییم که در آن k نقاط گسسته‌سازی و $\mathcal{W}_k$ تابع وزن مورد اشاره است. در حالت نامحدود بودن هر دو کران بالا و پایین انتگرال، گاوس و هرمیت تابع e^{-x^2} را به‌جای $\mathcal{P}(x)$ پیشنهاد کردند که در این پژوهش نیز از همین تابع استفاده شده است. همچنین ضروری است مطابق پیشنهاد ارایه شده در این روش انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\tilde{p}}{2\pi}e^{i\tilde{p}\tilde{x}+F_t(\tilde{p})}$ را در یک ضریب $e^{-\tilde{p}^2}$ به‌عنوان تابع وزن $\mathcal{W}_k$ ضرب و تقسیم کنیم که داریم:

$$\mathcal{P}(x) = e^{-\tilde{p}^2} \tag{۲۱}$$

و

$$\mathcal{G}(\tilde{p}) = \frac{e^{\tilde{p}^2}}{2\pi}e^{i\tilde{p}\tilde{x}+F_t(\tilde{p})} \tag{۲۲}$$

همان‌گونه که بیان شد، به‌منظور تخمین پارامترهای مدل هستون کافی است مجموع مجذور تفاوت احتمالات نظری حاصل از رابطه مربوط به $P_t(x)$ با احتمالات تجربی را

1- Davis & Rabinowitz, 1975.

کمینه کنیم. برای این منظور محاسبه احتمالات تجربی مربوط به شاخص کل نیز ضروری است. اگر این احتمالات را $P_t^{(\text{index})}$ بنامیم برای محاسبه آن باید پس از اندازه‌گیری بازده لگاریتمی r_t آن را به زیربازه‌های با طول مساوی Δr تقسیم و فراوانی نسبی بازده لگاریتمی واقع در هر زیربازه متساوی‌الطول را محاسبه و سپس، هر یک را به Δr تقسیم کرد (در این فرآیند زیربازه‌هایی که دارای فراوانی مطلق کمتر از ۵ عدد بودند، حذف شدند، زیرا این زیربازه‌ها برای تخمین پارامترها قابل اتکا نیستند). پس از آن باید عبارت زیر را به روش‌های بهینه‌سازی غیرخطی کمینه کرد:

$$\sum_{x}\left|\ln P_t^{(\text{index})}(x)-\ln P_t(x)\right|^{۲} \qquad (۲۳)$$

۵- نتایج تحلیل داده‌ها

همان‌گونه که شرح داده شد، داده‌های مورد استفاده در این تحقیق داده‌های مربوط به شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران است که براساس آن در ادامه پس از تحلیل خواص آماری این داده‌ها، در دو بخش مجزا به تشریح نتایج حاصل از تخمین پارامترها و شبیه‌سازی‌های انجام شده برای محاسبه ارزش در معرض خطر به روش تشریح شده در بخش‌های قبل می‌پردازیم.

- بررسی خواص آماری داده‌ها:

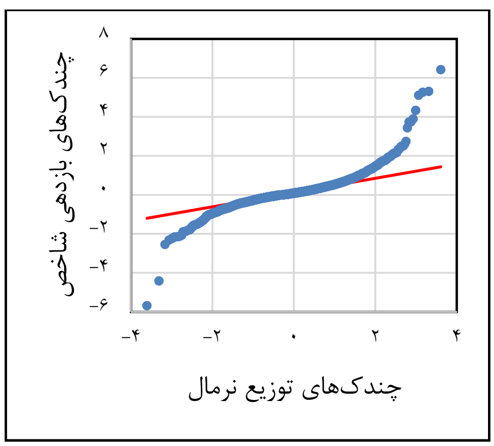
همان‌طور که بیان شد، مهم‌ترین انتقادهای مطرح شده به مدل حرکت براونی هندسی را می‌توان در سه گروه عدم توزیع نرمال بازده، ثابت نبودن نوسانات و گسستگی داده‌ها (به دلیل وجود جهش‌های ناگهانی قیمت دارایی‌های مالی) تقسیم کرد. ازاین‌رو، قبل از آزمون عملکرد مدل هستون برای رفع این مشکلات، در این بخش با بررسی خواص آماری داده‌ها، وجود این مشکلات را در داده‌های مربوط به شاخص کل مورد بررسی اولیه قرار می‌دهیم. بدین منظور در ابتدا در جدول شماره ۱، به ارایه نتایج آزمون توزیع تجربی بازدهی‌های روزانه در مقایسه با توزیع نرمال به چهار روش متفاوت پرداخته شده است.

جدول ۱- نتایج آزمون توزیع تجربی بازدهی‌های روزانه در مقایسه با توزیع نرمال

روش آزمون	آماره آزمون	آماره تعدیل یافته	مقدار *P*
لیلی‌فورس (D)	۰/۱۰۰۷۱۳	---	۰
کرامر – فون‌میسیس ($W2$)	۱۴/۷۵۴۲۹	۱۴/۷۵۶۵۹	۰
واتسون ($U2$)	۱۴/۴۷۵۳۶	۱۴/۴۷۷۶۲	۰
اندرسون – دارلینگ ($A2$)	۸۴/۸۳۳۷۶	۸۴/۸۵۳۶۳	۰

با توجه به نتایج ارایه شده در جدول براساس تمام روش‌ها، فرض صفر دال بر توزیع نرمال داده‌های بازدهی تأیید نشده است و ازاین‌رو، نمی‌توان گفت که داده‌ها از توزیع نرمال پیروی می‌کنند. به عبارت دیگر، انتظار می‌رود مدل‌های تصادفی که نتیجه توزیعی آن نرمال است (مانند مدل حرکت براونی هندسی)، در مقایسه با مدل هستون عملکرد ضعیف‌تری داشته باشد. برای بررسی بیشتر علت این موضوع، در شکل شماره ۲، نمودار QQ بازدهی شاخص کل برای مقایسه با توزیع نرمال ترسیم شده است.

شکل ۲- نمودار QQ بازدهی شاخص



در این نمودار نیز به‌خوبی مشخص بوده که دنباله‌های توزیع (نقاط) چندان قرابتی با توزیع نرمال (خط) نداشته و توزیع بازدهی در دنباله‌ها نسبت به توزیع نرمال پهن‌تر است.

همچنین برای بررسی وجود نوسانات تصادفی در داده‌ها می‌توان از آزمون گلدفیلد - کوانت بهره برد. برای این منظور ضروری است که داده‌ها پس از میانگین‌زدایی به دو قسمت تقسیم شود و نسبت واریانس آنها براساس توزیع فیشر مورد مقایسه قرار گیرد. به‌طور معمول در این روش براساس ماهیت داده‌ها عمل دو قسمت کردن صورت می‌گیرد و در صورت نبود معیاری خاص برای این منظور (مانند این پژوهش) دو قسمت به‌طور مساوی در نظر گرفته می‌شود.

جدول ۲- نتایج آزمون گلدفیلد - کوانت (GQ)

نسبت واریانس‌ها	آماره F
۱/۸	۱/۰۸

براساس جدول شماره ۲، می‌توان گفت فرض تساوی واریانس‌ها تأیید نشده است و ازاین‌رو، استفاده از مدل با واریانس تصادفی ضروری می‌نماید. همچنین می‌توان از طریق آزمون لیانگ و باکس و آماره Q به بررسی وجود نوسانات خوشه‌ای در داده‌ها پرداخت. بدین منظور در جدول شماره ۳، آماره Q با ۱۰ وقفه برای مجذور بازدهی ارایه شده است.

جدول ۳- آماره Q تا وقفه ۱۰

تعداد وقفه	ضریب خودهمبستگی	ضریب خودهمبستگی جزیی	آماره Q	مقدار P
۱	۰/۱۵۷	۰/۱۵۷	۷۸/۹۹۷	۰/۰۰۰
۲	۰/۰۹۷	۰/۰۷۴	۱۰۸/۹۷	۰/۰۰۰
۳	۰/۱۰۳	۰/۰۷۹	۱۴۲/۷۲	۰/۰۰۰
۴	۰/۰۴۷	۰/۰۱۴	۱۴۹/۷۲	۰/۰۰۰
۵	۰/۰۶۴	۰/۰۴۳	۱۶۲/۹۳	۰/۰۰۰
۶	۰/۰۳۹	۰/۰۱۲	۱۶۷/۷۶	۰/۰۰۰
۷	۰/۰۴	۰/۰۲۱	۱۷۲/۸۶	۰/۰۰۰
۸	۰/۰۴۱	۰/۰۲۱	۱۷۸/۲۷	۰/۰۰۰
۹	۰/۰۵	۰/۰۳۳	۱۸۶/۳۶	۰/۰۰۰
۱۰	۰/۰۷۴	۰/۰۵۳	۲۰۴/۱۴	۰/۰۰۰

در این آزمون، فرض صفر دال بر بی‌معنا بودن آماری ضریب همبستگی بین مجذور بازدهی‌ها تأیید نشده است و ازاین‌رو، بین مجذور بازدهی‌ها همبستگی وجود دارد. به عبارت دیگر، پدیده نوسانات خوشه‌ای در داده‌های مربوط به بازدهی روزانه مشاهده

می‌شود و ضرورت استفاده از مدل‌های با نوسانات تصادفی قوت می‌گیرد. از دیگر آزمون‌های جدیدتر بررسی وجود نوسانات خوشه‌ای در بازدهی، آزمون نسبت واریانس است که نتایج آن برای بازدهی در جدول شماره ۴، ارایه شده است.

جدول ٤- نتایج آزمون نسبت واریانس

نام آزمون	مقدار آماره	درجه آزادی	مقدار *P*
Max |z| (at period 16)*	۳۳/۲۸	۳/۲۰۵	۰/۰۰
Wald (Chi-Square)	۱۲۸۳/۹۵	۱۵	۰/۰۰

در این آزمون، فرض صفر دال بر گام تصادفی بودن بازدهی است که با توجه به مقدار P این فرض نیز تأیید نشده و شواهد دال بر وجود پدیده نوسانات خوشه‌ای در بازده و در نتیجه، افزایش اهمیت استفاده از مدل‌های با نوسانات تصادفی است.

نتایج حاصل از تخمین پارامترها:

همان‌گونه که شرح داده شد، با استفاده از یک پنجره تخمین به طول ۳۰۰۰ داده مربوط به شاخص کل، ۲۰۰ مرتبه پارامترهای مدل هستون تخمین زده شد که خلاصه نتایج آن به شرح جدول شماره ۵، است.

جدول ٥- پارامترهای تخمینی مدل هستون

معیار	پارامتر μ	پارامتر γ	پارامتر θ	پارامتر k
میانگین	۰/۰۰۱۲۵۳	۰/۰۳۵۴۷۹	۰/۰۲۰۵۰۷	۰/۰۴۳۹۸
میانه	۰/۰۰۱۲۵۷	۰/۰۳۴۷۵۵	۰/۰۲۰۷۹۲	۰/۰۴۳۳۳۱
بیشترین	۰/۰۰۱۲۹۷	۰/۰۹۹۱۸۸	۰/۰۲۱۰۸۶	۰/۱۰۰۸۱
کمترین	۰/۰۰۱۲۰۴	۰/۰۲۸۶۷۲	۰/۰۰۱	۰/۰۳۶۲۵
انحراف معیار	۲/۳۸E-۰۵	۰/۰۰۶۵۸	۰/۰۰۱۷۴۵	۰/۰۰۶۵۸۲

همان‌طور که مشاهده می‌شود مقدار میانگین پارامتر μ برابر ۰/۰۰۱۲۵۳ درصد است بدین معنا که به‌طور متوسط بازده میانگین روزانه پنجره داده‌های منتقل شده به جلو برابر با این مقدار بوده است. همچنین مقدار پارامتر γ بیان‌کننده سرعت بازگشت به میانگین

فرآیند واریانس است که معکوس آن برابر ۲۸ بوده، به عبارتی، مدت زمان بازگشت واریانس به میانگین خود برابر ۲۸ روز معاملاتی (کمتر از یک ماه براساس ۵ روز معاملاتی در هر هفته) خواهد بود. خاطرنشان می‌شود، این مقدار در تحقیقات مشابه (مانند تحقیق دراگولسکو و یاکونکو) برابر ۲۲ روز بوده است. همچنین براساس مدل هستون، مقدار میانگین بلندمدت نوسانات برابر ۱۴ درصد (جذر میانگین پارامتر θ) است.

نتایج حاصل از شبیه‌سازی‌های انجام شده:

در این قسمت به تشریح نتایج حاصل از شبیه‌سازی‌های انجام شده و ارزش در معرض خطر حاصل از این شبیه‌سازی می‌پردازیم و آن را با مدل حرکت براونی هندسی مقایسه می‌کنیم. در ابتدا در جدول شماره ۶، مقادیر میانگین و انحراف معیار ارزش در معرض خطر محاسبه شده براساس هر دو مدل نمایش داده شده است.

جدول ٦- آمار توصیفی مقدار شاخص و ارزش در معرض خطر محاسبه شده با استفاده از دو مدل

عنوان	میانگین	انحراف معیار
ارزش در معرض خطر مدل هستون	۲۸۹۸۷/۰۷	۵۰۲۳/۰۴۵
ارزش در معرض خطر مدل حرکت براونی هندسی	۲۹۱۴۶/۱	۴۸۳۲/۷۷۳

همان‌گونه که از جدول می‌توان دریافت، میانگین ارزش در معرض خطر مبتنی‌بر مدل هستون از مدل حرکت براونی هندسی کمتر است (این موضوع با استفاده از آزمون مقایسه‌های زوجی در سطح خطای ۱ درصد نیز بررسی شده و مورد تأیید قرار گرفته است). ازاین‌رو، می‌توان گفت مدل حرکت براونی هندسی نسبت به مدل هستون، ارزش در معرض خطر را محافظه‌کارانه‌تر تخمین می‌زند.

٦- مقایسه ارزش در معرض خطر حاصل از مدل هستون و حرکت براونی هندسی با استفاده از تکنیک‌های پس‌آزمون:

اگرچه در قسمت‌های قبلی تا حدی به مقایسه ارزش در معرض خطر محاسبه شده به هر دو روش پرداخته شد، با این حال، برای کسب نتایج دقیق‌تر در این بخش با استفاده از

تکنیک‌های پس‌آزمون مقایسه دقیق‌تری بین دو روش انجام می‌دهیم. پس‌آزمون عبارت است از: رویکردی آماری و سیستماتیک برای مقایسه مقادیر واقعی و پیش‌بینی شده توسط ارزش در معرض خطر[1]؛ برای نمونه، در صورت محاسبه ارزش در معرض خطر روزانه با فاصله اطمینان ۹۹ درصد انتظار می‌رود به‌طور میانگین از هر ۱۰۰ روز تنها در یک روز با خطا مواجه شویم (پوشش غیرشرطی). همچنین ضروری است مدل برتر خطاهایی ناهمبسته تولید کند (پوشش شرطی)[2]. از بین معیارهای پوشش غیرشرطی آزمون کوپیک[3] (۱۹۹۵) که تحت عنوان آزمون نسبت خطاها نیز شناخته می‌شود بیشترین رواج را داراست. این روش به‌رغم سادگی با این مسأله روبه‌رو است که تنها نسبت خطاها را در نظر گرفته و استقلال آنها را بررسی نمی‌کند. برای رفع این نقیصه نیز روش‌های متعددی ارایه شده که ساده‌ترین آنها روش زمان تا نخستین خطاست که در عمل چندان کارایی ندارد. برخلاف این روش معیار دیگری که تحت عنوان روش کریستوفرسون[4] (۲۰۰۴) شناخته می‌شود، کاربرد فراوانی دارد. با این حال، این روش نیز با این اشکال روبه‌رو است که تنها وابستگی خطاها را با یک وقفه در نظر می‌گیرد. هاس[5] (۲۰۰۵) برای حل این مسأله با تکمیل مدل کوپیک روشی جدید تحت عنوان آزمون ترکیبی کوپیک ارایه کرد. براساس این، در جدول شماره ۷، به ارایه اطلاعات مربوط به مهم‌ترین معیارهای پس‌آزمون می‌پردازیم.

1- Niepolla, 2009.
2- Jorion, 2001.
3- Kupiec
4- Christofferson
5- Hass

جدول ۷- معیارهای پس‌آزمون ارزش در معرض خطر محاسبه شده با استفاده از دو مدل

معیار پس‌آزمون	رابطه محاسباتی	نوع توزیع معیار	براونی هندسی		مدل هستون	
			مقدار	Prob.	مقدار	Prob.
نسبت خطاها	$LR_{POF} = -۲ln\left(\frac{(۱-p)^{T-x}p^{x}}{\left[۱-\frac{x}{T}\right]^{T-x}\left(\frac{x}{T}\right)^{x}}\right)$	کای‌دو با ۱ درجه آزادی	۵/٤۳۰	۰/۰۱۹	۳/۹۳۹	۰/۰٤۷
زمان تا اولین خطا	$LR_{TUFF} = -۲ln\left(\frac{p(۱-p)^{\upsilon-۱}}{\left(\frac{۱}{\upsilon}\right)\left(۱-\frac{۱}{\upsilon}\right)^{\upsilon-۱}}\right)$	کای‌دو با ۱ درجه آزادی	۰/۰۲۱	۰/۸۸۲	۰/۵۸۸	۰/٤٤۲
کریستوفرسون	$LR_{cc} = LR_{POF} + LR_{indc}$	کای‌دو با ۲ درجه آزادی	۵/۸۱۱	۰/۰۵٤	۳/۹۳۹	۰/۱۳۹
کوپیک ترکیبی	$LR_{mix} = LR_{POF} + LR_{indk}$	کای‌دو (درجه آزادی: تعداد خطاها بعلاوه ۱)	۱۷/٤۲۸	۰/۰۱٤	٤/۵۲۸	۰/۰۳۳

در این جدول منظور از T تعداد مشاهدات، x تعداد خطاها، p سطح خطای محاسبه ارزش در معرض خطر، v زمان تا نخستین خطا، LR_{indc} و LR_{indk} به ترتیب، روابط ارایه شده توسط کریستوفرسون و هاس برای در نظر داشتن همبستگی بین خطاهاست[1].

همچنین تمام معیارها با توزیع کای‌دو و با فرض صفر قابل قبول بودن مدل تعریف می‌شوند. بدین ترتیب، هر دو مدل براساس تمام معیارها مورد تأیید قرار می‌گیرند (با سطح خطای ۱ درصد). همچنین برمبنای مقایسه مقادیر Prob، تنها در معیار کریستوفرسون مدل حرکت براونی هندسی نسبت به مدل هستون عملکرد بهتری دارد و براساس ۳ معیار دیگر، مدل هستون در جایگاه برتری قرار می‌گیرد.

۷- نتیجه‌گیری

در این نوشتار پس از تشریح مقدمات مورد نیاز برای درک معادلات دیفرانسیل تصادفی، مدل هستون به‌عنوان معادله دیفرانسیل تصادفی که می‌تواند برخی از معایب عنوان شده

1- Olli, 2009.

برای مدل حرکت براونی هندسی (مدل مورد استفاده عمومی) را پوشش دهد، مورد بررسی قرار گرفت و سپس، نحوه تخمین پارامترهای آن با روش مبتنی‌بر توزیع با استفاده از قضیه فوکر – پلانک توضیح داده شد. همچنین برای تخمین این پارامترها به روش مورد اشاره، از روش گاوس – هرمیت بهره جستیم. سپس، برمبنای تحلیل خواص آماری داده‌های تحت بررسی اهمیت استفاده از مدل هستون به‌عنوان مدلی با نوسانات تصادفی را خاطرنشان کردیم. در ادامه، پس از تخمین پارامترهای مدل برای شاخص کل، شبیه‌سازی‌هایی برای محاسبه ارزش در معرض خطر انجام که مشخص شد، مدل حرکت براونی هندسی نسبت به مدل هستون، ارزش در معرض خطر محافظه‌کارانه‌تری ارایه می‌دهد. در نهایت، براساس تکنیک‌های پس‌آزمون، مشاهده شد که مدل هستون نسبت به مدل حرکت براونی هندسی عملکرد عمومی بهتری داشته است (به‌جز معیار کریستوفرسون، سایر معیارها دال بر برتری مدل هستون بوده‌اند).

در نهایت، پیشنهاد می‌شود تا در مطالعات بعدی دیگر انواع معادلات دیفرانسیل معرفی شده در این نوشتار بررسی و با استفاده از رویکردهای کاربردی مختلف دیگر مانند قدرت پیش‌بینی، بهینه‌سازی تصادفی و...، عملکرد هر یک نسبت به دیگری سنجیده شود.

منابع

Christofferssen, P. & Pelletier, P. (2004), *Backtesting Value-at-Risk: Duration- Based Approach*. Journal of Empirical Finance, 2.

Davis, P.J. and Rabinowitz, P. (1975), *Methods of Numerical Integration*, Academic Press, New.

Dragulescu, Adrian & Yakovenko (2002), *Probability Distribution of Returns in the Heston Model with Stochastic Volatility*. Quantitative Finance, Vol. 2.

Focardi, Sergio M., & Fabozzi, Frank J (2004), *The Mathematics of Financial Modeling and Investment Management*. John Wiley & Sons, Inc.

Grotke, Jr.James N (2010), *An Introduction to the Mathematics of Value-at-Risk.*

Haas, M (2001), *New Methods in Backtesting, Financial Engineering*, Research Center Caesar, Bonn.

Heston, S. L (1993), *A Closed form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bonds and Currency Options*. Review of Financial Studies 6, 327–343.

Hull, J. C. and White, A. (1987), *The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatility*, Journal of Finance 42.

Jorion, P. (2001), *Value at Risk, The New Benchmark for Managing Financial Risk*, 2nd Edition, McGraw-Hill, United States.

Kupiec, P. (1995), *Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Management Models*, Journal of Derivatives 3.

Lopez, J (1998), *Methods for Evaluating Value-at-Risk Estimates*, Economic Policy Review, October.

Mikosch, Thomas (2004), *Elementary Stochastic Calculus with Finance in View*, World Scientific Publishing Co.

Niepolla, O (2009), *Back Testing Value at Risk Models*, Helsinki School of Economics.

Oksendal, Bernt (2003), *Stochastic Differential Equations an Introduction with Applications* (6th Ed), Springer.

Olli (2009), *Backtesting Value-at-Risk Models*. Helsinki School of Economics.

Peymany, Moslem, Neisy, Abdolsadeh (2010), *Stochastic Differential Equations in Finance*, Proceedings of the 7th International Conference of Applied Financial Economics (AFE).

Platen, Eckhard, Bruti-Liberati, Nicola (2007), *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations with Jumps in Finance*, Springer.

Psychoyios, Dimitris, & Skiadopoulos, George, & Alexakis, Panayotss (2003), *A Review of Stochastic Volatility Processes: Properties and Implications* (pp. 43-59), The Journal of Risk Finance.

Schonbucher, PJ & Wilmott, P (1995), *Hedging in Illiquid Markets: Nonlinear Effects*, Proceedings of the 8th European Conference on Mathematics in Industry

Schoutens, Wim (2003), *Levy Processes in Finance: Pricing Financial Derivatives*, JohnWiley & Sons Ltd.

Shephard, Neil & Andersen, Torben (2008), *Stochastic Volatility: Origins and Overview*, Handbook of Financial Time Series, Springer Verlag.

Wilmott, Paul (2006), *Paul Wilmott on Quantitative Finance*, John Wiley & Sons Ltd.

.